DOI:10.38146/bsz-ajia.2014.v62.i3.pp5-29

Elek Imre – Hanka László

Lábbelinyom-töredék mint tárgyi bizonyíték

A valószínűség-elmélet alkalmazásának lehetősége a nyomszakértői gyakorlatban és a bizonyítási eljárásokban

Lábbelinyomok, vagyis a lábbeli járófelületének mintázatát vagy annak egy részletét ábrázoló nyom szinte minden bűncselekmény helyszínén felkutatható, egyes statisztikai adatok alapján rögzítésükre gyakrabban kerül sor, mint az elkövető ujjlenyomatának biztosítására[1]. A lábbelitől származó nyomtöredékek gyakran értékes bizonyítékot szolgáltathatnak a nyomozás során, mivel a leképeződő nyomokban visszatükröződő egyedi sajátosságok lehetőséget adnak az egyedi azonosításra, ezzel kizárva minden más számításba vehető lábbelit is. A kriminalisztikai területen szolgáltatott bizonyítékok láncolatában egy helyszíni lábnyomtöredék alapján beazonosított cipő ugyanolyan erős bizonyítékként szolgálhat, mint például egy azonosított ujjlenyomat vagy a feszítési nyom alapján azonosított betörőszerszám, amelyet a gyanúsítottól foglaltak le[2].

E cikk szerzői a bűncselekmények során rögzíthető lábnyomok egyedi azonosításának egy új lehetőségét kutatják. Megismerkedhet az olvasó az igazságügyi kriminalisztikai nyomtan szemszögéből különböző nyomsajátosságokkal, ezek információtartalmával, az egyedi sajátosságok mennyiségi és minőségi szerepével és a klasszikus valószínűség-elmélet nyomszakértői gyakorlatban, bizonyítási eljárásokban történő alkalmazási lehetőségével is.

A lábnyomok általános sajátosságai

A nyomképző lábbelitípus azonosításának előzményei

A hatvanas évek elején a bűncselekmények helyszínein a bűnügyi technikusok által rögzített lábnyomokat jelentős hányadában cipészmester által „azo-

1 Sargur N. Srihari: Analysis of Footwear Impression Evidence https://www.ncjrs.gov/pdffiles1/nij/grants/233981.pdf

2 William J. Bodziak: Footwear Impression Evidence: Detection, Recovery and Examination. 2nd ed. CRC Press, 2000

nos kaptafára" készített bőrtalpú lábbelikkel hozták létre. Az ilyen típusú lábnyomok nyomszakértői vizsgálatakor az egyedi kialakításnak köszönhetően egyedi sajátosságokban gazdagabbak, a nyom általános sajátosságaiban azonban szegényebbek voltak. Ezért lábnyomos ügyekben a szakértői kirendelésekre gyakran a gyanúsított, vétlen személyek lábbelijeinek előkerülése után került sor, típusazonosításnak nem sok értelme volt, bár a nyomok vizsgálata alapján bizonyos bőrtalpú lábbelifajták között is lehetett különbséget tenni.

A formatalp megjelenésével, a cipőgyártás modernizálásával, bővülésével és az egyre fokozódó divatigények kielégítése nyomán egyre nagyobb választékban jelentek meg a különböző fajtájú és talpmintázatú lábbelik. A helyszíni lábnyomtöredék alapján történő típusazonosítás napjainkra értelmet kapott, és már „forrónyomon" rendelkezésre állhat az elkövető által viselt lábbeli számos paramétere. A manuális adatbázisokat (katalógusok, gyűjtemények) felváltották a számítógépes keresőprogramok. Európában talán a legismertebb félautomata keresőprogram a Solemate Sicar[3]. Ez a keresőprogram manuális kódolású, ami azt jelenti, hogy egy geometriai alapelemeket tartalmazó kódszótár segítségével meg kell adni a nyomtöredékben leképeződött mintázati elemek alakjellegzetességeit (például a lenyomattöredék tartalmaz négyszögű, hullámborda, cikcakk, peremszegély, márkajel jellegzetességeket), majd a saját adatbázisát használva egy találati listát készít, és ennek alapján a nyomszakértő szűkíti tovább a kört és választja ki a lehetséges nyomképző lábbeli típusát és méretét. A folyamatosan bővülő adatbázis immár százezres nagyságrendű lábbeli és formatalp számos adatát tartalmazza. A digitális technológia fejlődése és a globális, intelligens, internetalapú keresőrendszerek valószínűleg új utat nyitnak majd a lábbeli és gumiabroncs típusazonosításában is, felváltva ezzel a félautomatikus rendszereket.

A talpmintázat nyomképző felületének területe

Szakértői szempontból talán nem is az a legfontosabb, hogy a számításba vehető lábbelit ki gyártotta, hanem azok a képi információk vagy gyártói hivatkozások, amelyek alapján a szakértő a csoportazonosítást elvégezheti. Ezzel kapcsolatban az egyik fontos kérdés éppen a klasszikus valószínűség-elmélet alkalmazásánál merülhet fel, amikor a nyomhagyó lábbeli potenciális nyomképző mintázatának területét kell meghatározni, mivel a véletlenszerűen ki-

3 http://fosterfreeman.com

alakuló egyedi jellegzetességek száma arányos a lehetséges nyomképző felület területének nagyságával is.

A lábbelilenyomat-töredékek értékelésénél kialakult gyakorlat szerint általános sajátosságnak tekinthető minden olyan leképeződött méret- és alakjellegzetesség, amely az adott sorozatgyártásban elkészült lábbeli járófelületére jellemző. A legáltalánosabb jellemzők, a talpfelületi méret- és alakjellemzők (például talphossz, talpszélesség, sarokszélesség) gyakran nem mérhetők és nem azonosíthatók, de fontos szerepük abban van, hogy egy értékelhetőségi szintet el kell hogy érjenek, amelynek alapján következtetni lehet a nyomképző objektumra. Például a nyomtöredék egyetlenegy mintaelemet tartalmaz, de a lábbelitől való származás megállapításához szükséges legáltalánosabb jellemzők nem tükröződnek vissza.

Abban az esetben, ha egy helyszíni lábnyomtöredék elegendő általános sajátosságot tartalmaz a nyomképző lábbelitípus azonosítására, lehetőség van terület számítására, feltéve hogy az azonosított lábbelitípushoz tartozó rekord tartalmaz méretarányos lenyomati képet vagy talpfelületi ábrát. A területszámításnak jó módszere lehet, ha a képet, illetve a lenyomat ábráját szegmentáljuk. A szegmentálás célja a nyomképződési szempontból lényeges (mintázati elemek) és lényegtelen (sávok, bemélyedések) részek céltudatos részekre bontását jelenti[4]. Azoknál a talpmintázatoknál, amelyeknél a teljes talpfelületen belül a lényeges (nyomképző) elemek összessége túlsúlyban van, figyelembe lehet venni a teljes talp területét is. Egyes számítások szerint egy átlagos méretű lábbeli teljes talpfelülete 16 ezer mm^2. Ezzel az adattal számolva már mindössze két sajátossági pont megléte esetén olyan nagy valószínűségi eredményhez juthatunk, amely már kategorikus vélemény kialakítására is lehetőséget ad[5].

A lábbelinyom-sajátosságok információtartalma

Az egyedi sajátosságok kialakulása, értéke,
reprodukciós képessége és ezek jelentősége a nyomszakértői gyakorlatban

A lábbelinyomokban leképeződő egyedi sajátosságok rendszerint olyan talpfelületi elváltozások, amelyek a nyomhagyó lábbeli természetes használatával összefüggésben alakulnak ki. A szakértői tapasztalat alapján ezek a legkülönbö-

4 Berkes József – Hegedűs Gy. Csaba – Kelemen Dezső – Szabó József: Digitális képfeldolgozás és alkalmazásai. Keszthelyi Akadémia Alapítvány, Keszthely, 1996

5 Rocky S. Stone: Mathematical probabilities in footwear comparisons. Presented at the FBA Technical Conference on Footwear and Tire Tread Impression Evidence, Quantico, April 1984

zőbb módon, de leggyakrabban mechanikai sérülések, kopási jellegzetességek, hő-, vegyi hatás okozta deformálódások, törések, agyaghiányok, anyagfolytonossági megszakadások, idegenanyag-beékelődések, beépülések formájában alakulnak ki. A gyakorlatban elenyésző hányadban fordulnak elő olyan egyedi azonosítások, amikor a nyomban visszatükröződő jellegzetességek kialakulása nem a használattal, hanem a gyártási technológiával hozható összefüggésbe, és az egyedi azonosítás alapját is kizárólag az ilyen sajátosságok adják. A természetes használattal összefüggésben kialakuló egyedi jellegzetességek közé lehet sorolni még azokat a gyártás során keletkező egyedi jellegzetességeket is, amelyek csak meghatározott kopottsági szint elérése után válnak értékelhető nyomképzővé. Például a talp anyagában keletkezett légbuborék, zárvány, vagy egyéb inhomogenitásból eredő különböző kopási szint kialakulása. (például keményebb alapanyagú granulátum a puhább, a természetes használattal szemben kevésbé kopásálló kötőanyag). Az egyedi sajátosságok kialakulásánál különbséget lehet tenni a lábbelin meglévő és a nyomban visszatükröződő sajátosságok között. Erre azért is van szükség, mert az azonosítás szempontjából azokat a talpfelületi elváltozásokat lehet figyelembe venni, amelyek a nyomban is azonosíthatók, és amelyek a próbanyom-modellezéssel nem reprodukálhatók, azok az azonosításban sem vesznek részt. Ez azt jelenti, hogy a lábbeli talpfelületén vannak vagy lehetnek olyan egyedi sajátosságként értékelhető elváltozások, amelyek a nyomban nem képeződnek le. A nyomreprodukciós képesség azt jelenti, hogy a nyomban felkutatott egyedi sajátosság(ok) az azonosító lábbelin is megtalálható(k) és a próbanyom-mintavételek során úgy képeződnek le, hogy méreteiket, alakjellegzetességeiket, pozíciójukat megőrzik.

Természetesen minden sajátosságtípusnak van értéke és ez az érték annál nagyobb, minél különlegesebb a sajátosság, minél jobb a reprodukciós képessége. Egy adott egyedi sajátosság értékének megítélésében fontos, hogy milyen minőségű, mekkora és az alaksajátosságait tekintve milyen összetett, de szerepe van a vizsgálatot végző szakértő tapasztalatának is.

Az egyedi sajátosságok típusai

Az egyedi sajátosságokat kialakulásukat tekintve tehát két fő csoportra lehet osztani, így az egyik a gyártási technológia, a másik a természetes használat során alakul ki. A gyártási technológiából eredő egyedi sajátosságoknak lehet tekinteni minden olyan elváltozást, amely lenyomati képében már a gyártás után is egyedivé teszi a lábbelit, ilyen sajátosságok lehetnek például a formatalp anyagában keletkező felszíni levegőbuborékok, random egyenetlenségek.

Az egyedi sajátosságok másik – nyomszakértői azonosítás szempontjából jelentősebb – csoportja a lábbeli természetes használata folyamán keletkező és kialakuló mechanikai elváltozások. Utóbbinál jellemző az egyedi sajátosság keletkezésének vagy kialakulásának módja, mechanizmusa, ezért a nyomban különböző sajátosságtípusokat lehet elkülöníteni egymástól. Ezek közül talán a leggyakoribb egyedi sajátosságok a használat idején keletkező különböző jellegű sérülések és elváltozások. Az egyedisajátosság-típusokat a lenyomati kép alapján lehet definiálni, ez bizonyos korlátokat jelenthet a képi információk értékelésében, ezért bizonyos esetekben a tényleges sajátosságtípus megállapítására csak a nyomhagyó lábbeli előkerülésekor nyílhat lehetőség, például az idegen anyagok beékelődése és a mintázati elem felszínére tapadó anyagok okozta elváltozások hagyta lenyomati képek között esetenként azonosító lábbeli nélkül nem lehet különbséget tenni.

Mintázati elem részleges leképeződéséből eredő nyomhiány

A mintázati elem(ek) részlegesen leképeződhetnek, ha a mintázaton belül szintkülönbségek vannak, vagy a formatalpat alkotó egyes mintaelemek minősége miatt eltérő kopási szintek alakulnak ki. Részleges leképeződés alakulhat ki akkor is, ha a nyomhordozó felszín domborzata nem teszi lehetővé a teljes leképezést.

Mintázati elemet megosztó folytonossági megszakadás

Mintázati elemet megosztó folytonossági megszakadásos lenyomati képet a mintaelem felszínéből kiinduló, anyaghiánymentes sérülések okozhatnak. Ilyen nyomtani jellegzetesség a lenyomatban rendszerint metszett, mélyen karcolt, repesztett sérülések esetén tükröződik vissza.

Mintázat felszíni struktúráját megváltoztató hatások

A hő-, vegyi hatás is okozhat olyan elváltozásokat a talpmintázaton, amelyek a lenyomati képen megjelennek és egyedi sajátosságként értékelhetők. A leggyakoribb előfordulási módja, amikor felhevült anyagra rálépnek, vagy súrlódó hőhatás következtében a felszín struktúrája jellegzetesen megváltozik, például fodrozódik, de sugárzó hő hatására is deformálódhat akár a teljes talpmintázat is. A vegyi anyagokkal történő érintkezés során maró- vagy oldószer a talpmintázati részt roncsolja.

Mintázati elemen belüli anyaghiányos sérülés

Az anyaghiányos sérülésről akkor lehet beszélni, amikor a talpmintázati elem anyagából kiválik egy rész. Ennek számos oka lehet, például egy éles kavics, szikla, fémtárgy is okozhat olyan sérülést, amely a lenyomat képe alapján anyaghiányos sérülésként azonosítható.

Igen csekély kiterjedésű sérülések

A csekély kiterjedésű sérülések esetében a problémát általában nem a kiterjedés, hanem a reprodukciós képesség okozza. Egyedi sajátosságként azok a sérülések fogadhatók el, amelyek próbanyom-mintavételezések során jól modellezhetők, úgy képeződnek le, hogy méreteiket, alakjellegzetességeiket, pozíciójukat megőrzik, és ez a próbanyomatokban is kellőképpen visszatükröződik.

Mintázati elem mélyebb bevágása, karcolódása

A mintázati elemet ért különböző mechanikai hatások okozhatnak olyan elváltozásokat, amelyek hasonlók a mintázati elemet megosztó folytonossági megszakadás résznél leírtakhoz, de a mintaelemet nem osztják meg.

Mintázati elem rugalmas deformálódása

A mintázati elem rugalmas deformálódásának nyombéli visszatükröződése kétoldalú lehet, egyrészről a talpfelületi rugalmasság, másrészről a nyomhordozó rugalmassága okozhatja a nyom képében ezt az alakváltozást. Az előbbire jó példa egy extrém keletkezési mechanizmus, amikor a bűncselekmény elkövetője menekülése közben erkélyről leugrik szilárd burkolatra, az utóbbira pedig az, amikor a betörő a lakás átkutatásakor a rugalmas ágymatracra lép. A deformálódás mértéke a nyom dinamizmusa és a keletkezési körülmények modellezhetősége függvényében lehet egyedi azonosításra alkalmas a nyom.

Idegen anyagok beékelődése

Ha az idegenanyag-beékelődés hosszabb időn keresztül megőrzi nyomképző tulajdonságait, egyedi sajátosságként lehet értékelni. Abban az esetben, ha a beékelődő idegen anyag által létrehozott nyom képe elegendően összetett alakzatú és az alakzaton belül kijelölhető több sajátossági pont és a nyom képfelbontása is elegendő, önállóan is megalapozhatja az egyedi azonosítás sikerességét. Az idegenanyag-beékelődéses talpfelületi elváltozások, amelyek a nyomban is leképeződnek és a bűnügyi szakértői gyakorlatban talán a leggyakrabban fordulnak elő, az a mintaelemek közé beékelődő kavics vagy betontörmelék. A lábbelinyomok azonosításában szerzett tapasztalati adatok[6] alapján a beékelődések gyakorisága, száma a talpmintázatot alkotó egyes mintaelemek egymástól való távolságától és a mintaelem kiemelkedésének méretétől függ. Az olyan talpmintázaton, amelyet csekély távolságra elhelyezkedő, nagy kiemelkedésű mintaelemek alkotnak, nagyobb számban alakulnak ki tartósabb beékelődések. A beékelődés egy másik fajtája, amikor a mintázati elem anyagába ékelődik be az idegen anyag, például egy fémforgács, éles, hegyes tárgy.

Csekély kiterjedésű alaksajátosság nélküli „pontszerű" anyaghiányok

A csekély kiterjedésű alaksajátosság nélküli „pontszerű" anyaghiány azt jelenti, hogy a leképeződött nyomsajátosság elhelyezkedésében azonosítható, alakjellegzetességek szempontjából nem. Általában csekély kiterjedésű sajátosságok esetén fordul elő és a nyomképző köztes anyag, illetve a nyomhordozó minősége függvényében érheti el az észlelhetőség határát. A szakértői gyakorlatban nem jellemzőek azok az egyedi jellegzetességek, amelyeknél az adott sajátosságtípusban nem képeződnek le méret- és alakjellegzetességek.

Mintázati elem peremsérülései

A mintázati elemek peremsérülései az egyik leggyakrabban előforduló egyedi sajátosságok. Ennek az az oka, hogy a természetes használat közben a járófelületnek ezek a legsérülékenyebb részei. Mindamellett, hogy gyakran előforduló egyedi sajátosságokról van szó, a lábbelinyom-sajátosságok információtartalmát tekintve is előkelő helyen állnak, mivel ezek a sérülések rendszerint roncsolt szélűek, így egyetlen peremsérülés több egyedi sajátossági pontot is tartalmazhat.

6 Bűnügyi Szakértői és Kutatóintézet Nyomszakértői Laboratórium (1961–2013).

Mintázati elem felszínére tapadó anyagok okozta elváltozások

A mintázati elem felszínére tapadó különböző anyagok esetenként szintén okozhatnak jellegzetes elváltozásokat. Az ily módon kialakuló sajátosságokra általában jellemző, hogy nyomképző élettartamuk rövid, és ezen belül is gyorsan átalakul. Ha a cselekmény után rövid időn belül előkerül a keresett lábbeli, és a próbanyom-mintavétel is megtörténik, akkor az egyedi azonosításra is lehetőség nyílhat.

Az egyedi sajátosságok mennyiségi és minőségi szerepe a lábnyom azonosításában

Az azonosítás alapjául a lábbelik járófelületén természetes használat közben kialakuló fizikai elváltozások (mechanikai sérülések, kopási jellegzetességek, hő-, vegyi hatás okozta deformálódások, törések, agyaghiányok, anyagfolytonossági megszakadások, idegenanyag-beékelődések, beépülések stb.) véletlen előfordulása, valamint ezek végtelen variációs lehetősége szolgálhat. A gyakorlatban elenyésző arányban fordulnak elő olyan egyedi azonosítások, amikor a nyomban visszatükröződő jellegzetességek kialakulása nem a használattal, hanem a gyártási technológiával hozható összefüggésbe, és az egyedi azonosítás alapját is az ilyen sajátosságok adják. Mindegyik azonosításnál fontos, hogy a leképeződött nyom az általános (nyomképző objektum fajtájára utaló) jellegzetességek mellett elegendő minőségben tükrözze vissza az egyedi azonosításhoz szükséges mennyiségű sajátosságot. A lábbelis nyomok keletkezésében a minőség és a nyomkiterjedés kulcsfontosságú szerepet tölt be már a nyom felkutatásától kezdve, mivel ha a nyom nem éri el a helyszíni nyomkutatás során a vizuális észlelhetőség határát, akkor az a nyom valószínűleg nem is lesz biztosítva, ha viszont a minősége nem éri el a kívánt szintet, akkor a lábnyom egyedi azonosítása marad el. Az igazságügyi szakértő viszonylag ritkán találkozik az eredeti helyszíni nyommal, mivel az eredetben történő nyombiztosítás számos akadályba ütközhet (technikai, fizikai, ésszerűségi, gazdasági, indokolatlan károkozás elkerülése), ezért rendszerint a lábnyom biztosítására valamilyen nyomrögzítő anyag és módszer alkalmazásával kerül sor. A nyom rögzítésétől függetlenül az eredeti nyomról méretarányos fényképfelvétel készül. Így a szakértő számára eredeti nyom megmintázott másolata mellett rendelkezésre áll egy kellő felbontású fotó, digitális kép is, ezért lehetősége nyílik mindegyik forrásanyag tanulmányozására.

A megmintázott nyomokban, illetve az őket megörökítő felvételen keresni kell olyan felületi sérüléseket, karakteres jellemzőket, amelyek nyomszakértői szempontból egyértelműen azonosíthatóvá teszik majd a keresett cipőt. Ehhez a gyakorlatban a nyomszakértők általában szuperpozíciós összehasonlító módszert alkalmaznak. A szakértői azonosítás során az egyes sajátossági pontok értékelését egy optimális osztássűrűségű raszterhálós transzparens fólialap tovább segítheti, amely a gyakorlatban alkalmazott 340 mm × 180 mm méretű nyomrögzítő fólialap által felvett mintához illeszkedik. A pixelek nagysága a nyom minőségének (felbontóképességének) függvényében változhat, ennek megfelelően a leggyakrabban használható pixelméret 1 mm × 1 mm. A felbontás szükség szerint növelhető, tehát ha az azonosított felületi sérülések olyanok, hogy felfedezhetők bennük finomabb részletek, akkor a rács finomítható például egy sportcipő gumi talpfelülete polírozott kőburkolaton nyomot hagy, és a nyomképző köztes anyag (például por, finom szennyeződés) a nyomképződéskor a tökéletes leképeződéshez is hozzájárul. Ha egy átlagos felnőtt lábbeli méretét vesszük alapul, az a felbontás azt jelenti, hogy nagyjából tizenhatezer 1 mm^2 területű kis négyzettel fedik le a teljes talpnyomot. Illetve töredéknyom esetén ennek arányos részével[7].

A klasszikus valószínűség-elmélet alkalmazása lábbelinyom-sajátosságok vizsgálatában

Azon négyzet alakú tartományok száma, amellyel a nyom lefedhető, legyen tehát M. Tegyük fel, hogy a szakértői vizsgálatok során sikerül felfedezni e tartományok közül r darabban egyértelműen azonosítható felszíni sérülést, vagy más jellegzetes egyedi sajátosságot (például beékelődő idegen anyag). Az első kérdés: mi a valószínűsége, hogy az adott cipőtalpon a megadott felbontás esetén éppen ebben az r darab négyzetben sikerül nyomot találnunk? A választ a hipergeometriai eloszlás adja. Ez a szakirodalom[8] szokásos jelöléseivel a következő.

Hipergeometriai eloszlás: adott egy N elemű alapsokaság. Ebben az alapsokaságban van S darab valamilyen tulajdonsággal kitüntetett elem. Az alapsokaságból veszünk egy n elemű mintát, ismétlés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a mintában pontosan k darab kitüntetett tulajdonságú elem lesz? Beve-

7 William J. Bodziak: i. m.

8 Denkinger Géza: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1989; Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

zetünk egy *X* valószínűségi változót, amely az *n* elemű mintában a kitüntetett elemek száma. Ekkor *(1. képlet):*

1. képlet

$$P(X=k)=\frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}};\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \min\{n,\ S\}$$

Alkalmazzuk ezt a vizsgált problémára! Tegyük fel, hogy van egy lábnyom-töredékünk, amelyen tehát a mondott feltételekkel *r* darab egyedi sajátosságot találtunk. Mi a valószínűsége, hogy egy ugyanilyen mintázatú és ugyanattól a gyártótól származó és természetesen ugyanolyan méretű cipőn pontosan ugyanazokon a helyeken találunk *r* darab pontszerű egyedi sajátosságot? Ebben az esetben tehát az alapsokaság *M* elemű, a kitüntetett tulajdonságúak – vagyis a felszíni sérülések – száma *r;* és a minta elemszáma is *r.* Azt kérdezzük, mi a valószínűsége, hogy mind az *r* helyen megtaláljuk a nyomot. Ha ezeket az adatokat helyettesítjük az *1. képlet*be, tehát a hipergeometriai eloszlás képletébe, azt kapjuk, hogy

2. képlet

$$p-P(X=k)=\frac{\binom{r}{r}\binom{M-r}{r-r}}{\binom{M}{r}}=\frac{1\cdot 1}{\binom{M}{r}}=\frac{r!(M-r)!}{M!}=\frac{r!}{M(M-1)(M-2)\ldots(M-r+1)}$$

Különböző *M* és *r* értékekre vonatkozóan az *1. számú táblázat* tartalmazza a *p* valószínűség értékét.

Talán szemléletesebbek az adatok, ha e valószínűségek reciprokát írjuk a táblázatba. Ekkor azt kapjuk, hogy nagyjából mekkora elemszámú mintában található átlagosan egy darab az adott tulajdonságú elemből. Ezt tartalmazza a *2. számú táblázat.*

Ha arra gondolunk, hogy egy cipőt egy bűneset elkövetése után valószínűleg nem tesznek a szekrénybe, hogy a nyomozók első osztályú bizonyítékot találjanak – bár erre is van példa –, hanem tovább viselik, akkor világos, hogy a cipőtalpon további sérülések keletkezhetnek. Felmerül a kérdés, hogy ha van egy cipőtalpon további *q* darab pontszerű sérülés, azaz összesen felfedezhető *r+q* darab pontszerű sérülés, akkor mi annak a valószínűsége, hogy ezen *r+q* sérülés közül *r* darab pontosan azon a helyen van, ahol az elkövetéskor felvett nyomon azonosították az *r* darab sérülést. Ez nyilván ugyancsak hipergeo-

1. számú táblázat

A *p* valószínűség értéke a 2. képlet szerint, különböző *M* és *r* értékek mellett

M/r	1	2	3	4
1 000	0,001	2,002E – 06	6,01804E – 09	2,41446E – 11
5 000	0,0002	8,0016E – 08	4,80288E – 11	3,84461E – 14
10 000	0,0001	2,0002E – 08	6,0018E – 12	2,40144E – 15
15 000	6,66667E – 05	8,88948E – 09	1,77813E – 12	4,74264E – 16
20 000	0,00005	5,00025E – 09	7,50113E – 13	1,50045E – 16

2. számú táblázat

A *p* valószínűség reciproka, különböző *M* és *r* értékek mellett

M/r	1	2	3	4
1 000	1 000	4,995000E + 05	1,661670E + 08	4,141712E + 10
5 000	5 000	1,249750E + 07	2,082084E + 10	2,601043E + 13
10 000	10 000	4,999500E + 07	1,666167E + 11	4,164167E + 14
15 000	15 000	1,124925E + 08	5,623875E + 11	2,108531E + 15
20 000	20 000	1,999900E + 08	1,333133E + 12	6,664667E + 15

metriai eloszlással írható le. Az alapsokaság, tehát a kis négyzetek száma marad M, a kitüntetettek száma, a „kritikus nyomok” száma ugyancsak r, a minta elemszáma most nagyobb, $r+q$, de a kérdés ugyanaz: mi a valószínűsége, hogy az r „kritikus helyen” megtaláljuk a sajátossági pontokat? Ha ezeket helyettesítjük az első képletbe, megkapjuk a választ *(3. képlet)*:

3. képlet

$$p=P(X=k)=\frac{\binom{r}{r}\binom{M-r}{q}}{\binom{M}{r+q}}=\frac{1\cdot(M-r)!}{q!(M-r-q)!}\,\frac{(r+q)!(M-(r+q))!}{M!}=\frac{(M-r)!(r+q)!}{q!M!}=$$

$$=\frac{(r+q)!}{q!M(M-1)(M-2)...(M-r+1)}=\frac{(r+q)(r+q-1)...(q+1)}{M(M-1)(M-2)...(M-r+1)}$$

Világos, hogy az eredmény különbözik a *2. képlet*től, a valószínűség nagyobb, mint abban az esetben, amikor pontosan r darab nyom van a cipőtalpon. Szükség esetén a *2. képlet* helyett ezzel a valószínűséggel kell dolgoznunk.

Tegyük fel ezután, hogy a kezünkben van egy tárgyi bizonyíték, egy lábbeli, amelynek a talpvizsgálata alapján a szakértői vélemény egyértelműen azt állapítja meg, hogy a kérdéses lábbeli az, amelyik az elkövetés helyén talált nyomot hagyhatta. Felmerül a kérdés, lehetett-e egy másik cipő is az, amelyikkel a nyomot hagyták, és ha igen, akkor milyen valószínűséggel. Az első kérdésre a válasz természetesen az, hogy igen, létezhet más cipő is, de a második kérdés érdekesebb és fontosabb. Vizsgáljuk meg ennek a valószínűségét! Ehhez a vizsgálathoz a *binomiális eloszlás*t kell felhasználnunk[9]. A klasszikus jelölésekkel ez a *Bernoulli-feladat*ként is ismert probléma a következő.

Binomiális eloszlás: pontosabban, az n pozitív egész és valós paraméterekkel adott binomiális eloszlás. Adott egy esemény amely p valószínűséggel következik be. Tegyük fel, hogy végzünk n darab független megfigyelést az adott esemény vizsgálatára. A függetlenség azt jelenti, hogy egy megfigyelés eredménye nem befolyásolja a következő megfigyelés eredményét. A kérdés a következő: mi a valószínűsége annak, hogy az n darab független megfigyelés során a vizsgált esemény pontosan k alkalommal következik be? Ha a bekövetkező események számára bevezetjük az Y valószínűségi változót, akkor a válasz a következő *(4. képlet).*

4. képlet

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k};\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,n$$

Hangsúlyozzuk, hogy *a függetlenség alapvetően fontos feltétel.* Ha az események nem függetlenek, akkor ez a leírás nem alkalmazható. Az eloszlás természetesen abban az esetben is alkalmazható, ha nem „egy adott esemény" ismétlődő vizsgálatáról van szó, hanem egymástól független olyan eseményekről, amelyek azonos valószínűséggel következhetnek be. A mi vizsgálataink éppen ez utóbbi esetre vonatkoznak.

Kérdezzük meg, mi annak a valószínűsége, hogy létezik a nyomozók, szakértők birtokában lévő tárgyi bizonyítékon kívül olyan cipő, amely ugyanazt a nyomot hagyhatta. A kérdés természetesen nemcsak arra vonatkozik, hogy létezik-e még egy, hanem hogy létezik-e még legalább egy további ilyen cipő. Azt se feledjük el, hogy egy olyan cipő már a birtokunkban van, amilyet keresünk, tehát a kérdés az alábbi módon fogalmazható: *feltéve, hogy létezik legalább egy adott nyomot hagyó cipő, mi a valószínűsége, hogy egynél több ilyen cipő létezik?*

A kérdés tehát egy feltételes valószínűségre vonatkozik. A válaszhoz tisztázni kell ezt a fogalmat. Az A esemény B eseményre mint feltételre vonatkozó feltételes valószínűségét a következő módon értelmezzük *(5. képlet)*:

9 Denkinger Géza: Uo.; Rényi Alfréd: Uo.; William Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978

5. képlet

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

A bal oldal a feltételes valószínűség jele, a jobb oldal ennek az értelmezése. A számlálóban szereplő $A\cap B$ esemény azt jelenti, hogy az A és B események együttes bekövetkezésének valószínűségét kell osztani a B esemény valószínűségével. Alkalmazzuk ezt a mondott szituációra!

Használjuk a *4. képlet*ben értelmezett Y valószínűségi változót, amely ebben az esetben azt jelenti, hogy hány olyan lábbeli van, amelyen ugyanazokon a helyeken, szám szerint pontosan ugyanazon az r helyen találhatók felszíni sérülések. Világos, hogy az adott típusú és méretű cipőtalp felhasználásával készült 10 000–20 000 darab lábbeli egymástól függetlenül sérül, és az is világos, hogy a *2*. vagy *3. képlet* által meghatározott valószínűségek minden adott típusú cipőre pontosan egyenlők. Tehát alkalmazható a Bernoulli-feladat. Annak valószínűsége tehát, hogy $Y=k$ darab ilyen cipő létezik, pontosan a *4. képlet*tel adható meg, ahol a p a *2*. vagy a *3. képlet*tel van meghatározva.

Ha felhasználjuk az *5. képlet* értelmezését, valamint azt, hogy diszkrét eloszlások esetén a valószínűségek összege egy, akkor a feltett kérdésre a következő választ adhatjuk *(6. képlet):*

6. képlet

$$P(Y>1|Y\geq 1)=\frac{P\big((Y>1)\cap(Y\geq 1)\big)}{P(Y\geq 1)}=\frac{P(Y>1)}{P(Y\geq 1)}=\frac{1-P(Y=0)-P(Y=1)}{1-P(Y=0)}$$

Ahhoz, hogy ezt kiszámítsuk, élnünk kell bizonyos feltételezésekkel és jelölésekkel. Tudjuk, hogy van egy cipő a birtokunkban, amely a helyszíni nyomban leképeződött alak- és méretsajátosságoknak megfelel. Tegyük fel, hogy további N darab cipő szóba jöhet még egy adott populációban. Az N-re vonatkozóan a szakértőknek becslést kell tenniük. Egyrészt információ szükséges arról, hogy az adott lábbelitalpból összesen mennyit gyártottak – ehhez léteznek megfelelő adatbázisok és ipari kapcsolatok –, másrészt becsülni kell, hogy ebből az adott bűncselekmény elkövetéséhez milyen lélekszámú populáció az, amely érintett lehet. Ez utóbbi arra szolgál, hogy szűkítsük az összes cipőtalp esetleg túl nagy számát. Ezek után kényelmesnek tűnik a megfigyelések, tehát a lehetséges nyomhagyó lábbelik számára az $N+1$ jelölést alkalmazni, utalva arra, hogy egy gyanúsított már van.

Ha a *6. képlet*be helyettesítjük a valószínűségeket a *4. képlet* szerint, valamint figyelembe vesszük az előbbi jelölést, akkor a következő adódik *(7. képlet)*:

7. képlet

$$P(Y>1|Y\geq 1)=\frac{1-\binom{N+1}{0}p^0(1-p)^{N+1}-\binom{N+1}{1}p^1(1-p)^N}{1-\binom{N+1}{0}p^0(1-p)^{N+1}}$$

Némi egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy *(8. képlet)*

8. képlet

$$P(Y>1|Y\geq 1)=\frac{1-(1-p)^{N+1}-(N+1)p(1-p)^N}{1-(1-p)^{N+1}}$$

Ha tehát az a kérdés, hogy mi a valószínűsége annak, hogy létezik egynél több olyan lábbeli, amely a helyszínen talált nyomot hagyhatta, akkor a választ a *8. képlet* adja. Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a *válasz függ az* N értéktől *tehát az érintett populáció lélekszámától. Nem adhatunk felelősségteljes becslést a kérdéses esemény valószínűségére, kizárólag a talp vizsgálata alapján. Becslést kell tennünk arra vonatkozóan, hogy hány személynek lehet ilyen típusú cipője, akiknél a talp sérülése egymástól függetlenül akár ugyanúgy bekövetkezhetett. A 3. számú táblázat* tartalmazza a *8. képlet* szerint kiszámított adatokat néhány esetre. Illusztrációként a *p* valószínűség értékéül az *1. számú táblázat* első két oszlopában található adatokat választottuk.

Ha összehasonlítjuk ezeket az értékeket az *1. számú táblázat*beli értékekkel, akkor szembeszökő a jelentős mértékű különbség. Felfedezhetünk akár négy nagyságrendnyi eltérést is a táblázatok megfelelő adatai között, ami egy

3. számú táblázat

A 8. képlet alapján értelmezett feltételes valószínűség különböző *N* és *p* értékek mellett (*N* = populáció elemszáma)

p/N	1000	5000	10 000	15 000	20 000
0,001	0,418240474	0,966160508	0,999548201	0,999995445	0,999999959
0,0002	0,096681232	0,418066709	0,68701562	0,842853706	0,925397513
0,0001	0,049170015	0,229266592	0,418045	0,569199871	0,686990166
6,66667E – 05	0,032964435	0,157431007	0,296579038	0,418037764	0,522746526
0,00005	0,024792493	0,119800865	0,229259775	0,328567803	0,418034146
2,002E – 06	0,001000668	0,004996662	0,009976623	0,014939886	0,01988645
8,0016E – 08	4,00069E – 05	0,000200027	0,000400027	0,0006	0,000799947
2,0002E – 08	9,99933E – 06	5,00042E – 05	0,000100007	0,000150008	0,000200007
8,88948E – 09	4,4406E – 06	2,22235E – 05	4,44467E – 05	6,66696E – 05	8,88922E – 05
5,00025E – 09	2,49599E – 06	1,25006E – 05	2,5001E – 05	3,75014E – 05	5,00017E – 05

bűneset értékelése kapcsán jelentős különbségnek számít. Világos azonban, hogy *a két táblázat adatai más kérdésre adnak választ.*

Igen tanulságos ezeknek az értékeknek a reciprokát is táblázatba foglalni, mert túl azon, hogy szemléletesebb, az eredmény jobban mutatja a lényeges elvi különbséget a *2. számú táblázat* adataihoz képest. Egészen más fényben tüntet fel egy bűnesetet, ha a *2. számú táblázat* adatai helyett, amikor egyszerűen csak a *p* valószínűségre hivatkozunk, a *4. számú táblázat* adatait használjuk a bizonyítási eljárásban.

4. számú táblázat

A 8. képlet alapján értelmezett feltételes valószínűség reciproka, különböző *N* és *p* értékek mellett

p/N	1000	5000	10 000	15 000	20 000
0,001	2,39096898	1,035024711	1,000452003	1,000004555	1,000000041
0,0002	10,34326912	2,391962759	1,455570982	1,186445516	1,080616692
0,0001	20,33759816	4,361734489	2,392086976	1,756852121	1,455624912
6,66667E – 05	30,33572392	6,351988833	3,371782464	2,392128381	1,912973021
0,00005	40,33478985	8,34718513	4,361864178	3,043511847	2,392149084
2,002E – 06	999,3321348	200,1336233	100,2343138	66,93491622	50,28549715
8,0016E – 08	24995,6756	4999,333089	2499,833244	1666,666645	1250,083356
2,0002E – 08	100006,6875	19998,33247	9999,33325	6666,333252	4999,83328
8,88948E – 09	225194,6955	44997,32457	22498,83378	14999,33308	11249,5833
5,00025E – 09	400643,1659	79996,37143	39998,32509	26665,66616	19999,33349

Itt szeretnénk rámutatni egy számolástechnikai egyszerűsítési lehetőségre. Ismert tény[10], hogy bizonyos körülmények között a binomiális eloszlás közelíthető *Poisson*-eloszlással. Ha a *4. képlet*ben $n \to \infty$ és $p \to 0$ úgy, hogy közben $np \to \lambda$, akkor a *4. képlet* helyettesíthető a következő összefüggéssel *(9. képlet)*

9. képlet

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Ez a közelítés esetünkben jogos, ugyanis ha a *7.*, illetve a *8.* formulákat alapul vesszük, abban az *N*, a populáció mérete nagyjából 10^4 nagyságrendű, a *2.*, illetve *3. képlet* szerinti *p* pedig 10^{-5} vagy ennél kisebb nagyságrendű. Ha ezt felhasználjuk, akkor a *7. képlet* a következő alakban is írható *(10. képlet)*:

10 Denkinger Géza: i. m.; Jánossy Lajos: A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965

10. képlet

$$P(Y>1|Y\geq 1)=\frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}=\frac{1-(\lambda+1)e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

ahol a paraméter értéke pontosan $\lambda=(N+1)p$.

A mondott nagyságrendi feltételek teljesülése esetén tehát a *8. képlet* helyett alkalmazhatjuk a *10. képletb*en látható összefüggést, ha a számítások egyszerűsítése érdekében ez szükséges.

Elemi Bayes-analízis

A valószínűség-elmélet nagyon hatékony eszköze a *Bayes*-tétel[11], amely a következőt állítja. Ha a $B_1, B_2, ..., B_n$ egy teljes eseményrendszer, azaz páronként kizáró események, amelyek összege a biztos esemény, és az A egy tetszőleges esemény, akkor tetszőlegesen rögzített i indexre vonatkozóan teljesül a következő *(11. képlet):*

11. képlet

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_k P(A|B_k)P(B_k)}$$

A legegyszerűbb teljes eseményrendszer egy esemény és a komplementere, azaz B és $\overline{B}$. Ez nyilván teljes eseményrendszer, ugyanis egy esemény és a komplementere egyszerre nem következhet be, és az összeg a biztos esemény, hiszen nyilván igaz, hogy vagy bekövetkezik a B esemény, vagy nem következik be, azaz vagy B következik be, vagy $\overline{B}$, harmadik eset nincs.

A mi vizsgálataink szempontjából a teljes eseményrendszer a következő lesz: B jelentse azt, hogy a gyanúsított az elkövető, ekkor a $\overline{B}$ azt jelenti, hogy nem a gyanúsított az elkövető. Pontosabban fogalmazva ez azt jelenti, hogy a kezünkben van egy pár cipő, amelyen található nyomok alapján a szakértők azt állítják, ez lehet az a cipő, amely a helyszínen a nyomot/nyomokat hagyta. A B tehát azt jelenti, hogy a kérdéses cipőt viselő személy az elkövető, $\overline{B}$ pedig azt jelenti, hogy nem ezt a cipőt viselte az elkövető. Az A esemény pedig azt jelenti, hogy a kezünkben van egy cipő, amelynek talpnyoma alapján

11 Colin Aitken – Franco Taroni: Statistics and the Evaluation of Evidence for Forensic Scientists. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2004; Franco Taroni – Silvia Bozza – Colin Aitken: Decision Analysis in Forensic Science. Journal of Forensic Sciences, vol. 50, no. 4, 2005; Denkinger Géza: i. m.; Rényi Alfréd: i. m.; William Feller: i. m.; Jánossy Lajos: i. m.

feltételezhető, hogy a helyszínen a nyomot hagyta. Ha ezeket a jelöléseket alkalmazzuk a *11. képlet*re, akkor a „bűnösség", illetve az „ártatlanság" vizsgálata esetén a következő adódik *(12. képlet)*:

12. képlet

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}\;;\;P(\overline{B}|A)=\frac{P(A|\overline{B})P(\overline{B})}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

Máris hangsúlyozzuk a következő alapvetően fontos gondolatot. Akár a „bűnösséget", akár az „ártatlanságot" szeretnénk vizsgálni, alátámasztani matematikai módszerrel, mindkét valószínűséget ki kell számítanunk, és csak az együttes vizsgálatból vonhatunk le valamilyen következtetést. Ezt a kérdést a következőkben részletesen vizsgáljuk.

A Bayes-analízisben szokás a következő elnevezések használata. A $P(B)$, $P(\overline{B})$ valószínűségeket *a priori* valószínűségeknek nevezzük. A $P(B|A)$, $P(\overline{B}|A)$ valószínűségek az *a posteriori* valószínűségek, és $P(A|B)$, $P(A|\overline{B})$ a valószínűségek pedig a *likelihood* valószínűségek. A témakörben nagyon fontos szerep jut[12] a legutóbbi fogalomnak.

A Bayes-tételt a bizonyítási eljárás bármelyik stádiumában alkalmazhatjuk, lépésenként térhetünk át az *a priori* valószínűségekről az *a posteriori* valószínűségekre, amint újabb és újabb bizonyítékok kerülnek elő. Ezért felírjuk a tételt általánosabb formában. Tegyük fel, hogy a vizsgálatok során már figyelembe vettek számos bizonyítékot. Jelölje ezt az „eseményt" *I,* ami arra utal, hogy már bizonyos információk birtokában alakítottuk ki akár a védelem, akár a vád szempontjából az *a posteriori* valószínűségeket. Tegyük fel, hogy felmerül egy új bizonyíték, vizsgálatainkban egy cipőtalpnyom, amely módosíthatja a valószínűségi becsléseket. Ebben az esetben az előző stádiumban kapott *a posteriori* valószínűségek *a priori*vá válnak, bemenetül szolgálnak a Bayes-tétel ismételt alkalmazásához. Ha ezt is figyelembe vesszük, például a vád szempontjából, akkor a *13.* összefüggés a következő módon írható:

13. képlet

$$P(B|A,I)=\frac{P(A|B,I)P(B|I)}{P(A|B,I)P(\overline{B}|I)+P(A|\overline{B},I)P(\overline{B}|I)}$$

Alkalmazzuk most ezt konkrétan például a „bűnösség" vizsgálatára! Pontosan ugyanilyen módon kell vizsgálni az „ártatlanságot". Tegyük fel, hogy a már elvégzett vizsgálatok alapján kialakult egy valószínűségi becslés, azaz

12 Colin Aitken – Franco Taroni: i. m.; Jánossy Lajos: i. m.

birtokunkban van egy az adott vizsgálat szempontjából *a priori* becslés, jelölje ezt $P(B|I)=p_0$. Ekkor nyilvánvalóan teljesül, hogy $P(\overline{B}|I)=1-p_0$. A kezünkben lévő bizonyíték alapján kiszámítjuk a *likelihood* valószínűségeket. Definíció szerint legyen $P(A|\overline{B},I)=p$. Ez a következő módon fogalmazható. Ha feltesszük, hogy vannak már korábbi bizonyítékok, és a birtokunkban van egy cipő, amelynek a talpnyoma megegyezik a helyszínen talált talpnyommal, p a valószínűsége annak, hogy a kezünkben lévő bizonyíték NEM az elkövető lábbelije. Vegyük észre, hogy ez éppen a *12.*, illetve *13.* formulákkal meghatározott valószínűség. Nyilvánvaló továbbá, hogy $P(A|B,I)=1$, ugyanis, ha a cipő az elkövető lábbelije, akkor biztos esemény az, hogy a kérdéses lábbeli hagyta a nyomot. Helyettesítéssel a következőt kapjuk *(14. képlet)*:

14. képlet

$$P(B|A,I)=\frac{1\cdot p_0}{1\cdot p_0+p(1\cdot p_0)}$$

Abban a speciális esetben, amikor nem vagyunk kellő információ birtokában, nyilván azt a becslést alkalmazzuk, hogy $p_0=P(B|I)=P(\overline{B}|I)=\frac{1}{2}$.
Ekkor a *14. képlet* a következőt adja *(15. képlet):*

15. képlet

$$P(B|A,I)=\frac{1}{1+p}$$

Abban az esetben, amikor a p értéke kicsi – vö. a *2.* és *3.* formulákkal –, amikor tehát viszonylag sok, egyértelműen azonosítható sérülési nyom található a cipőtalpon, ez a hányados egyhez közelít, azaz a bűnösség valószínűsége egyhez konvergál. Ismét hangsúlyozzuk azonban, hogy ez a vizsgálat önmagában kevés, ugyanezt a vizsgálatot el kell végezni a $\overline{B}$ esemény kapcsán is, és a kettő viszonya alapján tehetünk valamilyen kijelentést a bűnösség–ártatlanság kérdésével kapcsolatban.

Becsüljük most meg kissé konkrétabban a p_0 valószínűség értékét! Az előzőekben bevezettünk egy jelölést az érintett populáció lélekszámára, $N+1$ jelöli ezt az adatot. Figyelembe véve a függetlenséget, az egyetlen ésszerű, egyszersmind nyilvánvaló becslés az *a priori* valószínűségre az, hogy $p_0=P(B|I)=\frac{1}{N+1}$, ugyanis az érintett populációból – a talpnyom alapján ítélve – akárki elkövethette a bűncselekményt. Ha ezt a *14. képlet*be helyettesítjük, azt kapjuk, hogy *(16. képlet)*

16. képlet

$$P(B|A,I)=\frac{\frac{1}{N+1}}{\frac{1}{N+1}+p\left(1-\frac{1}{N+1}\right)}=\frac{1}{1+Np}$$

Alapvetően fontos összefüggéshez jutottunk a Bayes-tétel alapján. Nagyon fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy az eredmény függ az N értéktől, tehát a populáció elemszámától és nem kizárólag a mi mérési, kiértékelési módszereinkből adódó p értéktől. Az összefüggés alapján nyilvánvaló, hogy ha növekszik a populáció mérete, akkor a bűnösség valószínűsége csökken, ami szükségképpen teljesül, és ugyanez igaz természetesen a p valószínűségre is. Minél nagyobb annak a valószínűsége, hogy az adott talpnyom más cipőn is előfordulhat, annál kisebb a valószínűsége annak, hogy a gyanúsított a bűnös.

Ha tekintetbe vesszük a p-re adott *2. képlet*beli értéket, akkor a vizsgált valószínűség a következő konkrétabb alakban is írható *(17. képlet)*.

17. képlet

$$P(B|A,I)=\frac{1}{1+N\frac{1}{\binom{M}{r}}}=\frac{\binom{M}{r}}{\binom{M}{r}+N}=\frac{M(M-1)(M-2)...(M-r+1)}{M(M-1)(M-2)...(M-r+1)+N\cdot r!}$$

Egy részletesebb Bayes-analízis

Ebben a pontban ugyancsak a Bayes-tételt vesszük alapul a vizsgálatokhoz, de pontosabban, a részletekre jobban ügyelve fogunk becslést adni az előző pontban vizsgált valószínűségre, azonban a részletes matematikai levezetést mellőzzük, csak az eredmények közlésére helyezzük a hangsúlyt. Azt a kérdést tesszük fel, hogy egy precízebb vizsgálat hogyan módosítja a *16.*, illetve *17.* összefüggéseket. Mindenekelőtt ismételjük át a vizsgálatainkban szereplő események definícióját, illetve egészítsük ki egy további eseménnyel, A_0-lal!

T: az a tulajdonság, amely a gyanúsítottra jellemző, tehát jelen vannak meghatározott sérülések a cipőtalpon

A_0: az elkövetőt jellemzi a T tulajdonság

A: a gyanúsítottat jellemzi a T tulajdonság

B: a gyanúsított az elkövető

Mielőtt a vizsgálatainkat elkezdenénk, élnünk kell egy feltételezéssel, amely nélkül az alkalmazott matematikai modell helytelen, és amely egyébként intuitíve nyilvánvaló:

(F_0): a számításba jövő populáció minden tagja egymástól függetlenül ugyanazon p valószínűséggel bír a T tulajdonsággal.

Ezzel a feltételezéssel alkalmazható az *4. képlet*beli binomiális eloszlás. Ezek után megfogalmazhatjuk a kérdést.

Feltéve, hogy teljesül A_0 és A, mi a valószínűsége, hogy a gyanúsított az elkövető? Tehát a következő valószínűségi kérdést tesszük fel *(18. képlet):*

18. képlet

$$P(B|A \cap A_0) = ?$$

A részletes számítások mellőzésével megadjuk az eredményt. Ha figyelembe vesszük az események előbbi definícióját, a részletes számítások eredményeképpen az adódik, hogy *(19. képlet)*

19. képlet

$$P(B|A \cap A_0) = \frac{1}{1 + Np};$$

Ami pontosan megegyezik a *16*. eredménnyel. A *16.* és a *19. képlet* megegyezése azt jelenti, hogy a Bayes-analízis konzekvens módon alkalmazható, akár elemi módon alkalmazzuk, akár egy részletes vizsgálatban használjuk fel a következtetéseink meghatározására, ugyanarra az eredményre vezet. A *19.* eredmény a *16.* eredmény megerősítésének is tekinthető. Ismét hangsúlyozzuk tehát, hogy a „bűnösség" eldöntésének kérdésében hiba kizárólag a p valószínűségre hivatkozni, abban szerepe van a populáció N elemszámának is a *19. képlet* szerint.

Befejezésül rámutatunk egy nagyon lényeges momentumra, jelesül az A_0 esemény mint feltétel szerepére. Az előbbi számításokban figyelembe vettük a triviálisan teljesülő A_0 feltételt, az eredményeket mind ezzel a logikával vezettük le. Tegyük fel, hogy ezt most elhagyjuk, és feltételként csak az A eseményt írjuk elő. Az *5. számú táblázat* a *19*. összefüggés alapján számított valószínűségeket tartalmazza néhány esetre.

Ha ezek után az A_0 feltétel elhagyásával kiszámítjuk a „bűnösség" valószínűségét, akkor az előbbiekben nem részletezett számítássorozat értelemszerű módosításával a következő eredményt kapjuk *(20. képlet)*.

$$P(B|A) = \frac{1-(1-p)^{N+1}}{(N+1)p}$$

5. számú táblázat

A 19. képlet alapján értelmezett feltételes valószínűség értéke, különböző *N* és *p* konstansok mellett

p/N	1000	5000	10 000	15 000	20 000
0,001	0,5	0,166666667	0,090909091	0,0625	0,047619048
0,0002	0,833333333	0,5	0,333333333	0,25	0,2
0,0001	0,909090909	0,666666667	0,5	0,4	0,333333333
6,66667E – 05	0,9375	0,75	0,6	0,5	0,428571429
0,00005	0,952380952	0,8	0,666666667	0,571428571	0,5
2,002E – 06	0,998001998	0,990089197	0,980372915	0,970845481	0,961501444
8,0016E – 08	0,99991999	0,99960008	0,99920048	0,998801199	0,998402237
2,0002E – 08	0,999979998	0,9999	0,99980002	0,99970006	0,99960012
8,88948E – 09	0,999991111	0,999955555	0,999911113	0,999866676	0,999822242
5,00025E – 09	0,999995	0,999974999	0,99995	0,999925002	0,999900005

Ez azt jelenti, hogy *ha nem vesszük tekintetbe A_0-t mint feltételt, akkor egyrészt a Bayes-analízisnek ellentmondó eredményt kapunk, hiszen ez a formula nem egyezik a 20.-kal, másrészt az eredmény félrevezető is*. Ugyanis könnyen bizonyítható, hogy a *20.* eredmény nagyobb valószínűséget ad, mint a *19.*

Igaz ugyanis, hogy $\frac{1}{(1-p)^N} = 1 + Np + \frac{N(N+1)}{2!}p^2 + \frac{N(N+1)(N+2)}{3!}p^3 + \ldots$

és ebben az összegben az $1 + Np$ tag után szerepel még végtelen sok pozitív tag.

Ez a bizonyítási eljárásban azt jelenti, hogy ha a 19. helyett a hibás 20. képlettel számolunk, akkor a „bűnösség" valószínűségéhez a ténylegesnél nagyobb értéket rendelünk.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk tehát: számításaink akkor vezetnek az Bayes-analízis apparátusával egybehangzó eredményre, tehát akkor használjuk konzekvens módon a Bayes-tételt, ha a következőt tesszük. A $P(Y=k)$ *a priori* eloszlásról nem egy lépésben, kizárólag az *A* esemény figyelembevételével térünk át az *a posteriori* eloszlásra, hanem akkor járunk el helyesen, ha két lépésben, az A_0 és *A* események együttes figyelembevételével frissítjük az *a priori* eloszlást.

A likelihood hányados és szerepe az esélyek alakulásában

Ha teljesen elfogulatlan módon szeretnénk a matematikai módszereket alkalmazni a bizonyítási eljárásban, tekintettel kell lennünk az „ártatlanság" esetére is, egyszerre kell vizsgálnunk a B és $\overline{B}$ eseményeket. Feltételként vegyük figyelembe ugyanazokat az A_0 és A eseményeket, amelyeket már definiáltunk. A *12. képlet*ek analógiájára írjuk fel a Bayes-tételt mind a B, mind a $\overline{B}$ eseményre vonatkozóan *(21. képlet)*.

21. képlet

$$P(B|A \cap A_0) = \frac{P(A \cap A_0|B)P(B)}{P(A \cap A_0)} \; ; \; P(\overline{B}|A \cap A_0) = \frac{P(A \cap A_0|\overline{B})P(\overline{B})}{P(A \cap A_0)}$$

Osszuk most el a két egyenlőséget egymással. Ekkor a következő egyenlőség adódik *(22. képlet)*.

22. képlet

$$\frac{P(\mathrm{B}|A_0 \cap A)}{P(\overline{B}|A \cap A_0)} = \frac{P(A_0 \cap A|B)}{P(A_0 \cap A|\overline{B})} \cdot \frac{P(B)}{P(\overline{B})}$$

Az egyenlőségben az egyes hányadosok elnevezése balról jobbra haladva rendre a következő: *a posteriori esély* („odds"), *likelihood hányados* és *a priori esély* („odds"). A Bayes-tétel szimultán alkalmazása tehát arra ad lehetőséget, hogy az *a priori esélyt a likelihood* valószínűségek kiszámításával frissítsük, és ilyen módon áttérjünk az *a posteriori esélyre.* A bizonyítási eljárásban ennek az a szerepe, hogy ha felmerül újabb bizonyíték – esetünkben ez az A_0 és A eseményekkel van figyelembe véve –, akkor ezek tekintetbevételével megváltozhat a bűnösség ártatlansághoz viszonyított esélye.

A továbbiakban kiszámítjuk, hogy az előzőekben elvégzett számítások eredményeiből milyen érték adódik a *likelihood hányados*ra. Ahogyan azt a *6. képlet* levezetésénél már figyelembe vettük, $P(B) = \frac{1}{N+1}$, ebből nyilván következik, hogy $P(\overline{B}) = \frac{N}{N+1}$. Ezekből már adódik az a priori esély, amelynek értéke $\frac{P(B)}{P(\overline{B})} = \frac{1}{N}$. A *19. képlet* szerint kiszámítottuk az *a posteriori* valószínűségeket amelynek értéke $P(B|A \cap A_0) = \frac{1}{1+Np}$. Mivel az *a posterori* valószínűségek eloszlást alkotnak, azonnal adódik, hogy *(23. képlet)*

23. képlet

$$P(\overline{B}|A \cap A_0) = 1 - P(B|A \cap A_0) = 1 - \frac{1}{1+Np} = \frac{Np}{1+Np}$$

Ahonnan adódik az *a posteriori esély (24. képlet):*

24. képlet

$$\frac{P(B|A\cap A_0)}{P(\overline{B}|A\cap A_0)}=\frac{\dfrac{1}{1+Np}}{\dfrac{Np}{1+Np}}=\frac{1}{Np}$$

A *23.* és *24. képlet*ekből következik, hogy a *likelihood hányados* a következő *(25. képlet)*:

25. képlet

$$\frac{P(A\cap A_0|B)}{P(A\cap A_0|\overline{B})}=\frac{1}{p}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy a bűnösség és ártatlanság valószínűségének aránya egy lábbelinyom mint bizonyíték figyelembevételével 1/p-szeresére növekszik.

A *25. eredmény* helyességének alátámasztásaképpen kiszámítjuk a *likelihood hányadost* közvetlenül úgy, hogy nem hivatkozunk az *a priori* és *a posteriori* valószínűségekre. Ehhez felhasználjuk a valószínűségek szorzástételét[13]. E szerint írhatjuk, hogy *(26. képlet)*

26. képlet

$$\frac{P(A\cap A_0|B)}{P(A\cap A_0|\overline{B})}=\frac{P(A|A_0\cap B)\,P(A_0|B)}{P(A|A_0\cap\overline{B})\,P(A_0|\overline{B})}$$

Ebben a hányadosban kiszámítjuk az összes valószínűség értékét. Ha felidézzük az A_0, B és $\overline{B}$ események jelentését, világosan látható, hogy A_0 független ezektől, tehát a feltételes valószínűségek definíció szerint egyenlők a feltétel nélküli valószínűségekkel: $P(A_0|B)=P(A_0)$ és hasonlóan: $P(A_0|\overline{B})=P(A_0)$. Ezekből következik, hogy a jobb oldali második tört értéke egy. Az első tört számlálója nyilván egy, hiszen azt jelenti, hogy ha a gyanúsított a bűnös, akkor biztos, hogy a gyanúsított hagyta a nyomokat a helyszínen, tehát $P(A|A_0\cap B)=1$. Végül pedig az első tört nevezője definíció szerint éppen a p valószínűség. Ha ezeket az eredményeket mind helyettesítjük *26.-ba*, akkor ismét a *25.* eredményt kapjuk.

13 Denkinger Géza: i. m.; Rényi Alfréd: i. m.

Összegzés

Ebben a dolgozatban bemutattuk, hogyan alkalmazható a Bayes-analízis tárgyi bizonyítékokkal kapcsolatos valószínűségi adatok meghatározásában. Abból, hogy a kapott eredmények nem vezetnek ellentmondásra, hanem éppen ellenkezőleg, az összefüggések egységes rendszerbe illeszkednek, arra következtethetünk, hogy a Bayes-tétel jogosan és eredményesen alkalmazható lehet a nyomszakértői területen is. A cikkben több különböző valószínűségi eredményt vezettünk le, legfontosabbak ezek közül a *2.,* a *8.,* a *16.,* illetve a *19.* és a *22.,* illetve a *25.* formulák. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ezek a valószínűségek nem egyenlők, hiszen mindegyik más és más kérdésre adott válasz. Megpróbáltuk érzékeltetni, hogy a lábnyomos ügyekben a nyomképződés mennyire összetett, és milyen problémát jelenthet a lényeges és a lényegtelen képi információk szétválasztásánál és az egyedi sajátosságok vizsgálatakor. Összességében megállapíthatjuk, hogy a nyomszakértői területen a korábban követett morfológiai összehasonlításnak a mindennapi tapasztalatokra alapozott módszere a jövőben sem lesz nélkülözhető és megkérdőjelezhető.

IRODALOM

Aitken, Colin – Taroni, Franco: Statistics and the Evaluation of Evidence for Forensic Scientists. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2004

Aitken, Colin – Roberts, Paul – Jackson, Graham: Fundamentals of Probability and Statistical Evidence in Criminal Proceedings. Royal Statistical Society, 2010

Balding, David J. – Donnelly, Peter: Inference in Forensic Identification. *Journal of the Royal Statistical Society,* vol. 158, no. 1, 1995

Berkes József – Hegedűs Gy. Csaba – Kelemen Dezső – Szabó József: Digitális képfeldolgozás és alkalmazásai. Keszthelyi Akadémia Alapítvány, Keszthely, 1996

Bodziak, William J.: Footwear Impression Evidence: Detection, Recovery and Examination. 2nd ed. CRC Press, 2000

Denkinger Géza: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989

Feller, William: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978

Jánossy Lajos: A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása: Tankönyvkiadó, Budapest, 1965

Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

Srihari, Sargur N.: Analysis of Footwear Impression Evidence. https://www.ncjrs.gov/pdffiles1/nij/grants/233981.pdf

Stockmarr, Anders: Likelihood ratios for evaluating DNA evidence when the suspect is found through a database search. *Biometrics*, no. 55, 1999

Stone, Rocky S.: Mathematical probabilities in footwear comparisons. Presented at the FBA Technical Conference on Footwear and Tire Tread Impression Evidence, Quantico, April 1984

Taroni, Franco – Bozza, Silvia – Aitken, Colin: Decision Analysis in Forensic Science. *Journal of Forensic Sciences,* vol. 50, no. 4, 2005